HUMAN REVIEW | 2022 | ISSN 2695-9623
International Humanities Review / Revista Internacional de Humanidades
https://doi.org/10.37467/revhuman.v11.4082

LAS REPRESENTACIONES DE LA FUNCIÓN DURANTE LA ENSEÑANZA

Una mirada desde el conocimiento especializado y el trabajo matemático del profesor

Representations of the function during teaching
A look from teacher's specialized knowledge and mathematical work

GONZALO ESPINOZA-VÁSQUEZ [1], PAULA VERDUGO-HERNÁNDEZ [2]
[1]Universidad Alberto Hurtado, Chile
[2]Escuela de Pedagogía en Ciencias Naturales y Exactas, Universidad de Talca, Chile

KEYWORDS

Mathematical working space
Mathematics teacher's specialized knowledge
Function concept
Representations
Networking theories
Initial teacher training
Tools

ABSTRACT

This study aims at teachers' knowledge and mathematical work during function representations teaching through the joint use of two theoretical models. In concrete, a session for the 1st year of secondary education (14-15 years old) given by a mathematics teacher with the category of expert is analyzed. The results show the relationship between the mathematical work proposed in the classroom and the knowledge that this organization allows, contributing elements to the understanding of the teaching practice.

PALABRAS CLAVE

Espacio de Trabajo Matemático
Conocimiento especializado del profesor de matemática
Concepto de función
Representaciones
Conexión entre teorías
Formación inicial de profesores
Herramientas

RESUMEN

Este estudio aborda el conocimiento y el trabajo matemático del profesor durante la enseñanza de las representaciones de la función a través del uso en conjunto de dos modelos teóricos. Se analiza una sesión para el 1er año de enseñanza media (14-15 años) dada por un profesor de matemática con la categoría de experto. Los resultados dan cuenta de la relación entre el trabajo matemático que se propone en el aula y los conocimientos que permiten esta organización, aportando elementos a la comprensión de la práctica docente.

Recibido: 16/ 07 / 2022
Aceptado: 20/ 09 / 2022

1. Introducción

Uno de los conceptos más importantes en el desarrollo de la Matemática como disciplina científica es el concepto de función (e.g. Farfán y García, 2005; Ponte, 1992; Spivak, 1996; Youschkevitech, 1976). Existe diversas investigaciones relativas a este tema que muestran, por ejemplo, sus aspectos históricos y epistemológicos (e.g., Dubinsky y Harel, 1992; Ruiz-Higueras, 1994; Roque, 2012; Sastre et al., 2008), su fenomenología (Rico, 1997) o su comprensión (e.g., Akkoç y Tall, 2003; Jones, 2006; Sfard, 1991). Otras analizan su enseñanza en términos de la ejemplificación (e.g., Figueiredo, Contreras y Blanco, 2015) y las representaciones semióticas que se utilizan (e.g., Amaya et al., 2016; Rodríguez-Flores et al., 2018) o los significados que se le atribuyen (e.g., Pino-Fan, Parra-Urrea y Castro, 2019; Ribeiro y Cury, 2018). La función también es utilizada para ejemplificar los elementos teóricos que se proponen, como Sfard (1991), quien muestra el carácter operacional y estructural de los objetos a través de ella.

Las perspectivas de dichos trabajos son tan variadas como los sujetos de estudio, entre los que se encuentran: estudiantes de secundaria, universitarios, profesores en formación y profesores en ejercicio; textos escolares, programas de estudio y propuestas de enseñanza también contribuyen a diversificar la investigación en torno a este tema. Todo esto aporta a la comprensión que tenemos del concepto desde la perspectiva disciplinar, desde su aprendizaje y su enseñanza.

Los estudios históricos y epistemológicos sobre la función (e.g., Espinoza, 2020; Ruiz-Higueras, 1994; Youschkevitech, 1976) muestran que, a lo largo de su desarrollo, la forma de comprenderla ha variado desde la idea de covariación entre variables, dada por los registros de observaciones en las civilizaciones antiguas, pasando por la función como una expresión algebraica, como la descripción de curvas y la relación entre dos magnitudes, llegando hasta la actual versión rigurosa y formal de la función como un conjunto de pares ordenados (Spivak, 1996). Algunos autores plantean que el concepto de función comienza a desarrollarse en conjunto con la noción de número (e.g., Sastre *et al*., 2008; Ponte, 1992) debido a la correspondencia que se establece en el proceso de contar. Esta pluralidad de comprensiones y lo trascendental del concepto manifiestan el interés en su estudio respecto de cómo se comprende, aprende y enseña este tema.

En esta línea, un foco importante de estudio es el conocimiento profesional del profesor respecto de la función. Los estudios anteriores sirven de sustento para avanzar en la comprensión de lo que debe, puede o necesita conocer el profesor sobre este tema para conducir procesos de enseñanza efectivos. Los elementos que caracterizan a la función debieran estar, de una u otra manera, implicados en estos procesos de enseñanza y, al mismo tiempo, ser parte del conocimiento del profesor. Siguiendo esta idea, Amaya *et al*. (2016) abordan el conocimiento sobre las transformaciones e interpretaciones de distintas representaciones de la función que realizan los futuros profesores en relación a las propiedades de crecimiento, concavidad, valores extremos y pendiente de la recta en la resolución de problemas. Dicho reporte pone en evidencia problemas en la producción de representaciones de la función y en el establecimiento de las conexiones entre ellas, lo que impactaría negativamente en las propuestas de enseñanza de este tema.

Por su parte, del trabajo de Alpízar *et al*. (2018) se extrae que parte de los conocimientos relevantes del profesor para la enseñanza de la función son sobre las dificultades de los estudiantes en este tema, por ejemplo, al ubicar puntos en el plano cartesiano para representar la función, al modelar problemas dados en lenguaje natural con funciones o al interpretar a los parámetros de la función $f(x)=ax + b$. En consecuencia, el manejo de las representaciones de la función resulta fundamental al momento de organizar y ejecutar la enseñanza.

De acuerdo con Duval (1999), el trabajo que se realiza con los objetos matemáticos, está relacionado a los signos y las representaciones semióticas las que "se deben tomar en consideración en el análisis del pensamiento matemático" (p. 158). De este modo, al indagar en aquello que se propone como trabajo y desarrollo del pensamiento matemático, será clave el rol de las representaciones como mecanismo de acceso a los objetos matemáticos. En este sentido, Henríquez-Rivas y Espinoza-Vásquez (2018) señalan que el uso de las representaciones semióticas corresponde a la puerta de entrada al trabajo que promueve el profesor en el aula y su estudio ayuda a comprender su relación con el conocimiento que posee el profesor. Adicionalmente, Espinoza (2020), en concordancia con Pino-Fan *et al*. (2019), señala que el uso de estas representaciones también permite identificar algunos significados que se le han asignado al objeto matemático, dando cuenta de la forma de abordarlo y trabajar con él.

Esta diversidad de estudios, y perspectivas de abordaje, da cuenta de lo interesante que es el concepto y lo fructífero que resulta la indagación sobre el trabajo de aula del profesor. Además, plantea desafíos al intentar profundizar en su estudio mediante investigaciones originales y novedosas. Lo anterior nos lleva a proponer como tema de estudio el quehacer del profesor en términos del trabajo matemático que fomenta en sus clases y el conocimiento que moviliza para ello. Particularmente, nos focalizamos en el trabajo y conocimiento en torno a la enseñanza del concepto de función y sus representaciones, preguntándonos ¿cómo es el trabajo matemático que propone el profesor y cuál es el conocimiento que moviliza en la enseñanza de las representaciones de la función? Para ello, adoptamos los modelos del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, Carrillo *et al*., 2018) que permite analizar la práctica y conocimiento docente y el modelo de los Espacio de Trabajo Matemático (ETM, Kuzniak, 2011), que nos permite estudiar la actividad matemática del mismo. Asimismo, consideramos la complementariedad y beneficios del uso en conjunto de ambos modelos reportada en los trabajos de Verdugo-Hernández *et al*., 2022 y Espinoza-Vásquez *et al*., (2022), basados en el paradigma de conexión entre teorías (Prediger *et al*., 2008), que abordaremos en la siguiente sección.

2. Modelos Teóricos

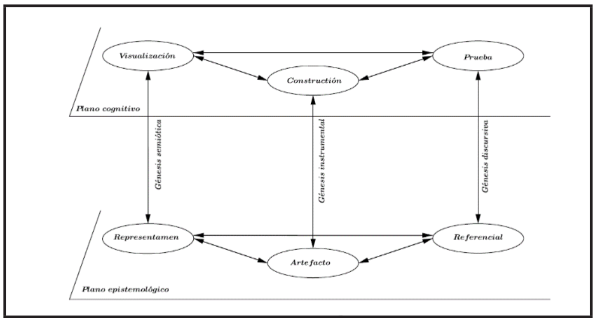
A continuación, presentaremos los modelos teóricos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y el Conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas (MTSK), los cuales serán utilizados para nuestro análisis.

2.1. Espacio de Trabajo Matemático

El modelo del Espacio de Trabajo Matemático estudia la actividad matemática en relación a tareas matemáticas cuando un individuo (profesor, estudiante y/o matemático) las desarrolla, las propone y organiza para la enseñanza, contemplando los planos epistemológicos y cognitivos. En cada uno de ellos se incluyen tres componentes. De acuerdo con Gómez-Chacón *et al.* (2016), en el plano epistemológico está la componente del *referencial* (formado por las propiedades, teoremas y definiciones), del *representamen* (signos semióticos) y del *artefacto* (que pueden ser materiales o simbólicos), mientras que, en el plano cognitivo se identifican las componentes de "la *visualización* relativa a la representación del espacio y al soporte material; la *construcción* que depende de los instrumentos y técnicas asociadas y la *demostración* [*prueba*] apoyada en el proceso discursivo de validación, basados en el referencial teórico" (p. 8). Según los autores, los planos se conectan mediante distintas génesis: una génesis instrumental para la operatividad y sentido de los artefactos en los procesos de construcción; una génesis semiótica que da la posibilidad de relacionar las componentes del representaren (signos) con la visualización (extracción del significado); una génesis discursiva que permite dar sentido y desarrollar la prueba por medio de fundamentos (definiciones, propiedades) del referencial teórico.

Es importante señalar que el ETM debe ser visto como la articulación de los dos planos mediante la activación de estas génesis activadas en torno a la resolución de una tarea, en lugar de la unión de las componentes individuales de ambos planos.

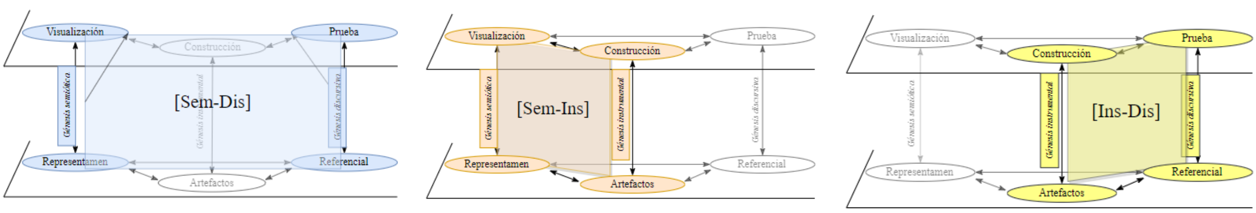
Figura 1. ETM y sus génesis



Fuente: Kuzniak, 2011.

Dichas génesis nos permiten hablar de tres planos: [Sem-Dis], [Ins-Dis] y [Sem-Inst] (figura 2) cobran presencia al activar las dos génesis que los forman.

Figura 2. Planos del ETM



Fuente: Adaptado de Kuzniak y Richard (2014), p, 23.

En el contexto del trabajo matemático en un nivel educativo dado, se distinguen tres tipos de ETM: *referencia*, *idóneo* y *personal*. El ETM de referencia se define idealmente de acuerdo con criterios matemáticos para organizar el conocimiento en un campo matemático coherente, basado en paradigmas que orientan y estructuran la organización de las componentes del ETM (epistemológicos y cognitivos). El ETM *personal* está relacionado a cada individuo y se define por la forma en la cual esta maneja o intenta resolver un problema matemático con su propio conocimiento y capacidades cognitivas. El ETM *idóneo*, se configura a partir de cómo el docente organiza la enseñanza, i.e., qué problemas y tareas propone, qué componentes del ETM utiliza (o pretende utilizar) y cómo las conecta para otorgar la oportunidad a los estudiantes de resolver los problemas y tareas propuestos. Cabe señalar que el ETM *idóneo* depende de la institución involucrada y se define de acuerdo con la forma bajo la cual el conocimiento debe ser enseñado, en relación con su función y lugar específico según el currículo institucional.

Kuzniak *et al.* (2016) considera como parte del trabajo matemático el uso de tres tipos de herramientas: semiótica, tecnológica y teórica. Adicionalmente, Verdugo-Hernández (2018) incorpora a este grupo la herramienta operacional. Todas ellas son utilizadas para referirse a aquellos elementos del plano epistemológico que tienen un uso potencial para resolver una tarea dada y que están asociadas con el plano cognitivo por medio de alguna de sus génesis. Las herramientas son:

Herramientas semióticas: herramientas no materiales para operar sobre representaciones semióticas de objetos matemáticos.

Herramientas tecnológicas: artefactos como herramientas de dibujo o técnicas rutinarias basadas en algoritmos o calculadoras con algoritmos de cálculo implementados.

Herramientas teóricas: correspondientes a razonamiento basado en la lógica y en las propiedades de los objetos matemáticos, las cuales pertenecen al referencial de la tarea que se busca resolver.

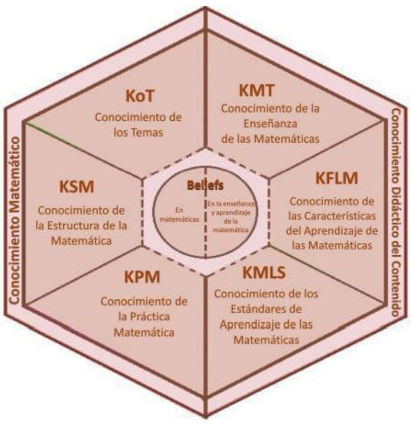
Herramientas operacionales: se refiere a aquellas herramientas teóricas, que son utilizadas para resolver cierta tarea, pero que no forman parte del referencial teórico al cual pertenece dicha tarea.

2.2. Conocimiento Especializado del profesor de Matemática

El MTSK (de sus siglas en inglés) se inspira en el aporte de Shulman (1986), quien destaca la importancia del conocimiento disciplinar, curricular y pedagógico como parte del conocimiento del profesorado. Se propone como un modelo analítico para estudiar el conocimiento y la práctica del profesor (Carrillo *et al*., 2014; 2018), en donde se contemplan dos dominios de conocimiento: el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), organizados en subdominios y categorías. Además, se incluye un dominio para las Creencias sobre la matemática, sobre su enseñanza y sobre su aprendizaje (figura 3).

El dominio del Conocimiento Matemático considera tres subdominios; el conocimiento sobre los tópicos de matemática que el profesor debe enseñar, como parte del cuerpo de conocimiento disciplinar (Conocimiento de los Temas - KoT), el conocimiento sobre la forma en que estos temas se conectan con otros (Conocimiento de la Estructura de la Matemática - KSM) y el conocimiento sobre formas de proceder y generar conocimiento matemático (Conocimiento de la Práctica Matemática - KPM). El KoT considera el conocimiento sobre las definiciones, propiedades y sus fundamentos, los registros de representaciones, los procedimientos y la fenomenología y aplicaciones asociadas a un concepto. Espinoza (2020) sugiere incluir aquí el conocimiento sobre los significados de los objetos matemáticos. El KSM considera el conocimiento sobre conexiones entre conceptos dadas por la simplificación o complejización (respecto de la evolución del concepto, no necesariamente curricular), las conexiones transversales (mediante algunas propiedades común y los modos de pensamiento asociados a ellos) y las conexiones auxiliares (respecto de la ayuda que puede prestar un concepto en el estudio de otro). El KPM actualmente no posee un sistema de categorías (Carrillo *et al*., 2018), pero contempla el conocimiento de la planificación en la resolución de problemas, el rol de los símbolos y lenguaje formal, formas de validar, demostrar y definir y prácticas particulares en un tema matemático como indicadores de prácticas matemáticas.

Figura 3. Dominios y subdominios del MTSK



Fuente: Carrillo *et al*., 2014.

Por su parte, el Dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido considera los subdominios para el conocimiento del profesor sobre las teorías, estrategias, técnicas y recursos asociados al proceso de enseñanza (Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática - KMT), el conocimiento asociado al aprendizaje de las matemáticas de sus estudiantes (Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas - KFLM) y el conocimiento sobre lo que está estipulado que un estudiante aprenda en un determinado nivel escolar desde una perspectiva curricular (Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas - KMLS). El KMT incluye el conocimiento sobre teorías de enseñanza, recursos materiales y virtuales y las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza de un tema. El KFLM contempla las teorías de aprendizaje, fortalezas y dificultades, formas de interacción con el contenido y aspectos emocionales del aprendizaje (intereses y expectativas), mientras que el KMLS involucra las expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual y procedimental y la secuenciación de temas anteriores y posteriores.

De acuerdo con Carrillo *et al.* (2018), el carácter de especializado del conocimiento radica en la expresión integrada de los conocimientos de los diferentes dominios, subdominios y categorías que el profesor pone en juego durante su práctica.

2.3. Complementariedad ETM-MTSK

En los últimos años, se ha notado un creciente aumento en las investigaciones que trabajan con más de una teoría (Castella, 2021), lo que se conoce como *networking theories*. Bajo este paradigma se observa la relación entre los modelos del ETM y MTSK, enmarcada en los distintos niveles de conexión que incluye Prediger *et al*. (2008). Autores como Radford (2008) y Prediger *et al*. (2008) señalan que para que dos teorías puedan ser conectadas se deben dar ciertas condiciones. Específicamente, según Radford una teoría está compuesta por Principios (P), Metodología (M) y Preguntas de Investigación Pragmáticas (PI), las cuales se pueden observar tanto en el ETM como en el MTSK (Verdugo-Hernández *et al*., 2022), lo que nos permite referirnos a una teoría al utilizar ambos modelos.

Espinoza-Vásquez *et al*. (2022) realizan una revisión de los trabajos que vinculan ambos modelos y muestran las estrategias de conexión utilizadas y los principales aportes de dicha vinculación a la fecha. Los primeros trabajos señalan que el uso en conjunto podría explicar la relación entre el conocimiento del profesor y lo que realizan finalmente los estudiantes en la sala (Flores-Medrano *et al*., 2016; Vasco *et al*., 2016). Los trabajos que retoman esta conexión avanzan en la comparación de sus elementos, proponiendo al profesor y la tarea matemática como elementos que facilitan dicha conexión (Espinoza-Vásquez, 2016). El aporte en el uso en conjunto está dado, por un lado, en pormenorizar los análisis en cada modelo y, por otro lado, las implicancias del conocimiento especializado del profesor en el diseño del ETM idóneo (Espinoza-Vásquez, Ribeiro y Zakaryan, 2018).

La profundización en la conexión aborda relaciones específicas, vinculando diferentes génesis del ETM con subdominios y categorías de conocimiento del MTSK. En esta línea, un conjunto de trabajos (e.g., Henríquez-Rivas y Espinoza-Vásquez, 2018; Verdugo-Hernández y Espinoza-Vásquez, 2018a, 2018b; Verdugo-Hernández *et al*., 2022) han avanzado hacia la complementariedad de las teorías aportando relaciones entre la génesis semiótica y el conocimiento de las representaciones, el uso de herramientas teóricas con el conocimiento del tema y el conocimiento de conexiones auxiliares con el uso de herramientas auxiliares. Los resultados muestran que el MTSK permite identificar elementos en el referencial y en la génesis semiótica como conocimiento de diferentes categorías del KoT y que el uso del conocimiento de diferentes subdominios se vincula a la activación de diferentes génesis en el ETM personal e idóneo del profesor. De ese modo se destaca el poder explicativo y descriptivo que ofrece el uso conjunto.

En esta oportunidad retomamos esta complementariedad para abordar nuestro objeto de estudio, acercándonos a una caracterización del trabajo matemático del profesor en relación al desarrollo de una tarea de función y al conocimiento que ésta moviliza sobre las representaciones del concepto.

3. Metodología

Esta investigación se desarrolla como una proyección del trabajo doctoral de Espinoza (2020), en el que se estudia el conocimiento especializado del profesor sobre el concepto de función. La elección de los modelos MTSK y ETM, así como la complementariedad señalada, nos hace plantear ciertas consideraciones metodológicas. Por una parte, en lugar de pretender elaborar un sistema de categorías de análisis para la práctica del profesor proveniente de la relación teórica entre ETM y MTSK, lo que buscamos es utilizar ambos constructos para verificar su potencial y el de sus relaciones en el desarrollo de una tarea. En este sentido, este trabajo aplica teoría en lugar de pretender generar una nueva (Glaser y Strauss, 1967).

Puesto que nuestro objetivo se enfoca en comprender la práctica de un profesor a la luz de determinados componentes teóricos y en un contexto determinado, hemos planteado en esta investigación desde un paradigma interpretativo (Creswell, 2014), con una metodología de corte cualitativo, diseñada como un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 2007), considerando un único caso de estudio. De acuerdo a Rodríguez *et al*. (1996), este diseño se justifica en la medida de que las características del caso seleccionado permitan cumplir con el objetivo propuesto y ampliar el conocimiento sobre el objeto de estudio. Los datos analizados para este escrito son parte del trabajo doctoral de Espinoza (2020) planteado desde el modelo MTSK sobre el concepto de función.

3.1. Selección y características del Informante

El caso de estudio fue seleccionado de acuerdo a dos criterios: a) desarrollo de la investigación y b) qué se esperaba encontrar en el caso. Para el primero, consideramos lo indicado por Loughran *et al*. (2008) sobre el fácil acceso al caso, la buena relación con los informantes, la posibilidad de realizar la investigación durante el tiempo necesario y el aseguramiento de la calidad y credibilidad del estudio. Para el segundo, adoptamos la caracterización de *profesor experto* realizada por Rojas *et al.* (2012), quienes identifican dos grupos de características (primarias y secundarias) presentes en estos profesores. Para dichos autores, un profesor experto puede aportar datos ricos en la evidencia sobre el conocimiento especializado y sobre las características del quehacer docente.

De acuerdo a Rojas *et al*. (2012), entre las características primarias, identificables mediante alguna entrevista de profundización u observación de la práctica, se encuentran: comprende los contenidos y el aprendizaje de los estudiantes; la enseñanza relaciona el contenido con diversas situaciones y representaciones; presenta problemas de mayor dificultad, diseña y elabora propuestas que favorecen el aprendizaje. Por otro lado, entre las características secundarias, identificables mediante un cuestionario simple, están: tiene cinco o más años de experiencia docente; ha enseñado el contenido de estudio más de una vez en los últimos años; es recomendado por sus pares y directivos; se actualiza en su disciplina, se ha implicado en procesos de investigación o innovación educativa; sus estudiantes destacan en evaluaciones externas.

El profesor informante, que llamaremos Arturo, es profesor de matemáticas de enseñanza media y se ha desempeñado como docente desde el año 2006 en cursos desde 5º básico (10 - 11 años) hasta 4º medio (17-18 años). Adicionalmente, posee experiencia docente a nivel universitario en cursos disciplinares de matemáticas para carreras de ingeniería y para futuros profesores de matemáticas. En su experiencia docente ha enseñado el tema de funciones de manera habitual en los cursos correspondientes. Arturo cuenta con los grados de Licenciatura en educación y Magíster en Matemáticas como una especialización disciplinar. Junto a ello, ha realizado cursos de perfeccionamiento en Estadística y Geometría para enseñanza media y sobre el diseño de programas de carreras de pedagogía. Luego de la observación de la práctica de Arturo también hemos podido comprobar su dominio del tema, el uso de situaciones, representaciones y problemas en la enseñanza de la función y su preocupación por el aprendizaje de sus estudiantes, lo que permite clasificarlo como experto. Junto con ello, y como parte de los criterios de selección, el profesor se mostró disponible a participar durante toda la investigación y facilitar el acceso a los datos necesarios para ello.

3.2. Recolección y análisis de datos

Los datos recolectados corresponden a la observación no participante (Flick, 2015) de las nueve sesiones de clases, cada una de 90 minutos, que Arturo destinó a la enseñanza de la función en un 1er año de enseñanza media (14-15 años). Estas sesiones se registraron en video para su posterior tratamiento. De estas nueve sesiones, hemos seleccionado, la primera clase, en la que el profesor enseña las diferentes representaciones de la función.

Las videograbaciones de las clases fueron transcritas para facilitar el tratamiento y análisis. En el proceso de transcripción se identificaron las intervenciones orales del profesor (P) y de los estudiantes (E) como parte de las interacciones en la sala de clases, enumerando cada una correlativamente. Para presentar las evidencias en este escrito se modificó dicha numeración de las intervenciones según el orden de aparición de los extractos presentados (aunque siguen el orden de aparición durante la clase). Adicionalmente, se contemplaron fotografías de la pizarra de la sala en que Arturo realizaba sus anotaciones para registrar las intervenciones escritas. Estos registros se llevaron a una planilla electrónica en la que se organizaron columnas para las los números correlativos, las intervenciones y la clasificación de los hallazgos en términos del conocimiento especializado y los componentes del ETM. La tabla 1 contiene los componentes del modelo ETM y su descripción, usados como protocolo para el análisis del trabajo matemático.

Tabla 1. Protocolo para el análisis del ETM.

Criterio	**Componente**	**Descriptor**
Génesis semiótica (GS)	Representamen	Relaciona objetos matemáticos y elementos significantes.
	Visualización	Interpreta y relaciona objetos matemáticos con los registros de representaciones semióticas (identificación, tratamientos, conversiones).
Génesis instrumental (GI)	Artefacto	Utiliza artefactos de tipo material o un sistema simbólico.
	Construcción	Se basa en los procesos dados por las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas.
Génesis Discursiva (GD)	Referencial	Utiliza definiciones, propiedades o teoremas
	Prueba	El razonamiento discursivo se basa en distintas formas de justificación, argumentación o demostración.

Plano vertical	[Sem-Ins]	Los artefactos se usan en la construcción de resultados bajo ciertas condiciones o para la exploración de representaciones semióticas.
	[Ins-Dis]	El proceso de prueba se basa en una experimentación con el empleo de un artefacto, o bien, en la validación de una construcción.
	[Sem-Dis]	El proceso de visualización de los objetos representados se pone en coordinación con un razonamiento discursivo para probar.

Fuente: Henríquez Rivas *et al*., 2021.

En la organización de los datos se determinaron episodios delimitados por los objetivos, explícitos o implícitos, que Arturo planteaba durante cada sesión. Esta identificación permitió, por una parte, reconocer momentos particulares de la enseñanza de la función como: el planteamiento de la definición de función, el uso de la analogía para la enseñanza del concepto y la enseñanza de propiedades de la función. Por otro lado, ayudó a establecer relaciones entre diferentes conocimientos del profesor que ayudan a comprender su práctica. Uno de estos episodios corresponde a la enseñanza de las diferentes representaciones de la función, que motiva el desarrollo de este trabajo.

Luego de dicha organización, se llevó a cabo un análisis de contenido (Bardin, 1996) considerando los modelos teóricos como instrumentos de análisis. Este análisis se realizó tanto a nivel de las intervenciones particulares como de episodios en búsqueda de evidencias de conocimiento especializado, de relaciones al interior de este y de características del trabajo matemático que promovía Arturo durante la enseñanza. La tabla 2 corresponde a la versión del protocolo para el análisis del conocimiento especializado, que incluye la descripción de los subdominios en cada dominio de conocimiento del modelo.

Tabla 2. Protocolo para el análisis del MTSK.

Conocimiento Matemático	
Sub dominio	**Descripción**
Conocimiento de los Temas (KoT)	Corresponde al conocimiento del profesor sobre el tema, su red conceptual y aplicaciones.
Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM)	Corresponde al conocimiento de las conexiones del tema con otros o su progresión epistemológica.
Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)	Corresponde al conocimiento sobre la forma en que se produce, explora y comunica en matemáticas.
Conocimiento Didáctico del contenido	
Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)	Corresponde al conocimiento de los temas como objetos de enseñanza.
Conocimiento de Características del Aprendizaje de la Matemáticas (KFLM)	Corresponde al conocimiento de los temas como objetos de aprendizaje.
Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)	Corresponde al conocimiento del profesor sobre lo que el estudiante debe o puede alcanzar en determinado nivel.

Fuente: Adaptado de Carrillo *et al*., 2018.

Los análisis se desarrollaron en tres etapas: descripción de la sesión/episodio, análisis bajo los elementos teóricos e interpretación de los hallazgos a la luz de los modelos considerados (Burns y Grove, 2004), lo que nos permite organizar y dar significado a los resultados que se presentan.

4. Descripción de la clase

Arturo inicia la sesión recordando los conceptos de plano cartesiano, coordenadas, el lenguaje de conjuntos y los cuantificadores. A continuación, presenta la idea de correspondencia mediante una situación cercana a los estudiantes, que le permite posteriormente definir el concepto de función como una correspondencia.

> 1 P: A cada uno le corresponde una silla, o sea, cada uno de ustedes está asociado a una silla, entonces eso es hacer una correspondencia: cada uno tiene su silla, cada uno tiene su mesa, ahí hay una correspondencia. Ustedes, como pertenecientes a un conjunto de alumnos y las sillas a un conjunto de sillas, entonces a todo el curso le corresponde una silla, esa es la idea de la palabra, que en el contexto que vamos a trabajar, por correspondencia. "Entonces, ¿cómo vamos a definir una función? Como una correspondencia de elementos, elementos de dos conjuntos en la que, a cada elemento de un conjunto de partida, le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada... lo voy a escribir". (Espinoza-Vásquez *et al*., 2018, p. 315)

Esta definición del concepto de función la vincula a la representación en diagramas sagitales para introducir los conceptos de imagen, pre imagen, dominio y recorrido de la función. Posteriormente, plantea una comparación entre la función y una máquina lavadora para hacer comprensible el concepto a sus estudiantes. En dicha comparación se resalta el carácter operacional de la función. A continuación, Arturo presenta algunos ejemplos de relaciones mediante diagramas sagitales para decidir si ellas son o no funciones a partir de la aplicación de la definición. Para profundizar en los conceptos solicita a sus estudiantes calcular imagen, preimagen mediante la evaluación de la función y la resolución de la ecuación $f(x)=k$. Finalmente, el profesor se propone enseñar las representaciones de la función, teniendo como meta la representación cartesiana. La tabla 3 contiene la síntesis de la sesión, sus episodios y descripción. En este trabajo abordamos el último episodio sobre la representación de la función.

Tabla 3. Descripción de la sesión mediante episodios y su descripción.

Episodio	**Descripción**
Conocimientos previos	Se recuerdan los conceptos de punto en el plano, la ubicación de puntos y la graduación de los ejes.
Definición del concepto de función	Se plantea la definición de función basada en la idea de correspondencia. Se presentan los primeros diagramas sagitales y se indican los conjuntos de partida, de llegada, dominio y recorrido.
Presentación de la función como una máquina, la función como proceso de entrada-salida	Se proporciona una analogía entre la función y una máquina lavadora para ayudar a la comprensión del concepto de función y asignarle un significado.
Uso de la definición para validar relaciones	Se usan las dos propiedades que se incluyen en la definición para decidir si las correspondencias planteadas son o no funciones.
Discusión sobre lo que es o no función	Se destaca la importancia de verificar la unicidad y exhaustividad en la asignación de imágenes. Se recurre a una representación con las manos para recordar cuándo es o no función una relación dada.
Ejercicios de evaluación de funciones, de identificación de funciones, de imágenes y pre imágenes	Se determinan las imágenes y preimágenes de elementos para ciertas funciones dadas en diagramas sagitales o por su expresión algebraica. Se destaca la idea de función como un proceso y se identifica utilizando las propiedades de unicidad y exhaustividad
Representaciones para la función	Se construyen secuencialmente las representaciones sagital, algebraica, numérica y cartesiana de una función afín. Se concluye sobre la forma de la representación cartesiana de la función, distinguiendo la función de su representación.

Fuente: Espinoza, 2020.

5. Análisis e interpretación

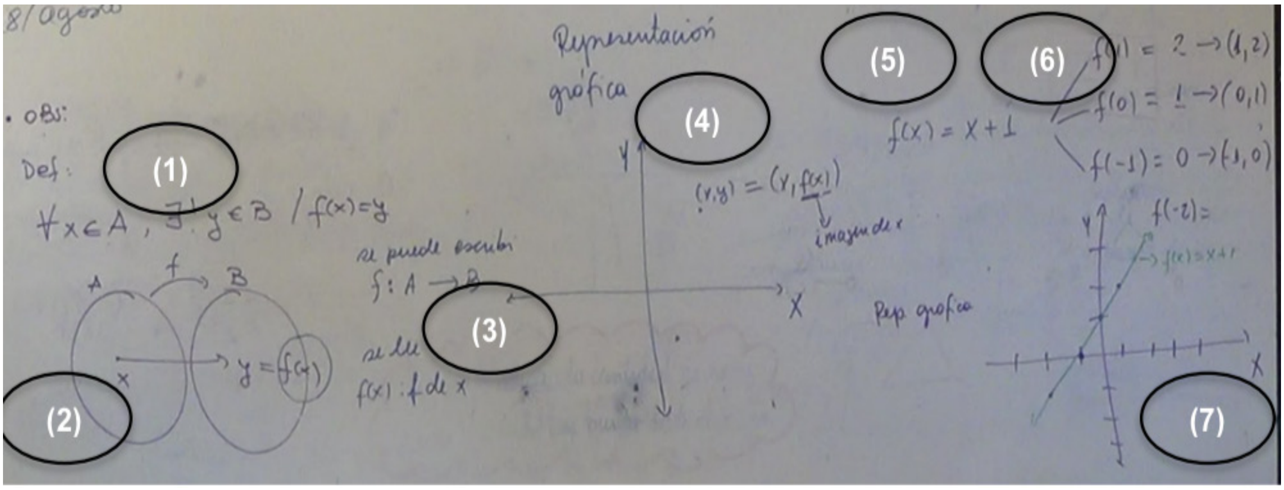
El episodio que analizamos incluye la presentación de la definición del concepto de función hasta la construcción de la representación gráfica de un ejemplo de función afín. Arturo inicia este episodio recordando la definición mostrada momentos antes en esta misma sesión, como se lee en el siguiente extracto.

> 2 P: Voy a escribir en lenguaje matemático la definición de función, esa que hemos repetido toda la clase de que „a cada elemento del conjunto de partida, le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada". Yo la voy a escribir en lenguaje matemático. La definición de función por comprensión. [mientras escribe los símbolos dice] „para todo elemento del conjunto A, o sea, a cada elemento del conjunto A, va a existir un único elemento en B, tal que $f(x)$ sea y".
>
> 3 P: Es lo mismo que hemos repetido todo el rato: a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada, cada elemento del conjunto de partida A, elemento x, es un elemento del conjunto A. Para cada uno de esos, existe un único en el conjunto de llegada que me lleve este elemento [x] en ese [y] mediante la función. Es lo que originalmente dijimos, esta es la función, este es el conjunto A, este es el conjunto B, el x, todos los x que están en este conjunto van a parar a un y, y ese y es el resultado de pasar el x por la función, ¿sí? Entonces, lo único que estoy diciendo, lo que hemos repetido todo el rato, está escrito en lenguaje matemático de símbolos; cada elemento de aquí le corresponde un único acá.

Arturo muestra un referencial definido en donde se puede observar su dominio sobre el concepto de función. En efecto, comienza con la definición (1), siendo esta la entrada a su ETM idóneo (figura 1), en el cual activa la componente del referencial hacia la génesis semiótica, destacando los cuantificadores universales y el lenguaje de conjuntos involucrados en la definición. El profesor expresa su conocimiento acerca de los signos al señalar "*está escrito en lenguaje matemático de símbolos*" (extracto 3). Junto a la activación del referencial, destacamos el uso del signo como una herramienta semiótica utilizada para expresar la definición de función dada en (1) a (2).

Asimismo, en el extracto 1, se observa parte de su ETM idóneo y su conocimiento sobre la definición del concepto, en donde presenta distintas representaciones de dicha definición en términos de esta simbología. Además, con la frase *"para todo elemento del conjunto A, o sea, a cada elemento del conjunto A, va a existir un único elemento en B, tal que f*(*x*) *sea y"*, Arturo muestra conocer el rol de los cuantificadores en la definición, lo que muestra su KPM sobre la comunicación de ideas matemáticas, asunto que también se refleja en (2) al asociar x con $y=f(x)$.

Figura 4. Articulación de representaciones de la función



Fuente: Espinoza, 2020, p. 268.

A continuación, Arturo usa esta definición para presentar el diagrama (2) como primera representación de la función, activando la génesis semiótica, desde el representamen a la visualización, lo que se aprecia en el extracto 3. La articulación de la definición y la representación sagital corresponde a una decisión que da origen a su estrategia de enseñanza por medio de la interpretación de la definición en el diagrama y nos permite establecer relaciones entre el KoT, el KMT y el ETM idóneo del profesor. El diagrama (2) permite a Arturo reforzar las notaciones usuales para la función (3) y retomar una parte de la definición.

El diagrama sagital permite identificar las nociones de: imagen, preimagen, conjunto de partida, conjunto de llegada, dominio y recorrido, mediante la representación de conjuntos. Además, el pasaje de (1) a (2) articula la definición de la función con el diagrama sagital y los nuevos conceptos asociados a la función, mostrando relaciones entre la definición y la representación de la función al interior de su KoT.

> 4 P: Si los relacionamos, las funciones las vamos a poder dibujar en el plano cartesiano. Les vamos a poder dar una representación gráfica, entonces esto, que era el conjunto de partida y el conjunto de llegada, se transforman en los ejes del plan cartesiano, esa es su versión, por eso es el *x* y por eso es *y*.

Arturo utiliza el diagrama sagital como sustento para la representación cartesiana que pretende este episodio, asignándole un carácter de herramienta semiótica en esta construcción. Esto se observa en el extracto 4, donde establece la relación entre los conjuntos de partida y llegada (de la definición) con los ejes X e Y del plano al señalar que "*el conjunto de partida y el de llegada se transforman en los ejes del plano cartesiano*". Con ello justifica el uso de las letras x e y como una notación coherente y articuladora al representar una función. Arturo utiliza su conocimiento sobre el concepto, ubicado en el referencial (la definición) y en el representamen (el diagrama sagital), para realizar y gestionar las representaciones de la función. De este modo activa la génesis semiótica en el ETM idóneo a partir del referencial. Pareciera ser que la relación entre x e y, como imagen y preimagen, se propone de manera transversal en la construcción de las diferentes representaciones.

A continuación, el profesor incluye al plano cartesiano (4) como un tema conocido por sus estudiantes y que usará para representar la función (KMLS). Esto da sentido al primer episodio de esta sesión, sobre los conocimientos previos, y permite inferir que su objetivo es construir la representación cartesiana de la función. En esta inclusión cobra relevancia el concepto de punto del plano y su relación con la gráfica de la función. Aquí, el plano cartesiano cobra el rol de herramienta semiótica al permitir el trabajo sobre la representación cartesiana de la función.

> 5 P: Para poder llevar una función a su representación vamos a tener que pasar la función a elementos que yo puedo dibujar aquí. ¿Qué elementos hay aquí [muestra el plano (4)]? ¿por qué está formado esto?
>
> 6 E: Coordenadas.

7 P: Por puntos o coordenadas. Si yo tengo la función $f(x)$, vamos a poner una simple „x+1“, y recordamos que los puntos son de la forma (x, y). Los y son los $f(x)$. Pongamos aquí: se lee como „efe de x“, función de x. Vamos a ir relacionando un montón de detalles.

El plano cartesiano (4), como una herramienta semiótica, explica los pares ordenados $(x, f(x))$ del gráfico de la función como puntos junto a la noción de imagen que relaciona el diagrama sagital con el cartesiano a través de las componentes del par. Esto activa el plano [Sem-Dis] del ETM idóneo. El plano cartesiano permite al profesor establecer una relación entre puntos (del plano) y pares ordenados (del gráfico de la función), asunto que se concretará en la representación (7). Ambos elementos (puntos y pares) tienen una naturaleza diferente; mientras los puntos tienen carácter geométrico, los pares son considerados desde la perspectiva de los conjuntos. En este sentido, es posible identificar que Arturo conecta estos conceptos a través de la misma representación cartesiana (KSM).

Dentro de su estrategia de enseñanza y de su ETM idóneo, Arturo incluye la función afín (5) para construir su representación cartesiana. Esta tarea de tipo „emblemática“ (Kuzniak y Nechache, 2016) que presenta a sus estudiantes, evidencia una nueva representación para la función: la algebraica. La función $f(x)=x+1$ inicia el estudio de la función en este nivel escolar y posibilita el cálculo rápido de imágenes para determinar los puntos para graficarla. Arturo reconoce la simpleza de esta función para sus estudiantes (KFLM) y selecciona este ejemplo por su conocimiento del tipo de funciones que debe estudiar en este nivel (KMLS), estableciendo el andamiaje para el trabajo con las funciones.

8 P: “La representación gráfica va a ser un conjunto de puntos que [...] como los elementos (x,y), porque necesito puntos que pertenezcan… el x que pertenezca al conjunto de partida, el y al conjunto de llegada, y donde la segunda coordenada sea necesariamente la imagen de la primera.” (Espinoza, 2020, p. 122)

El procedimiento para determinar la representación gráfica pasa por el cálculo de imágenes para $f(x)$. Este proceso se observa en (6) y corresponde a un registro numérico de la función, organizado en pares, similar a cómo se representaría en una tabla de valores. El uso de los valores 1, 0 y -1 se sustenta en el conocimiento del profesor sobre las fortalezas de sus estudiantes al evaluar estos números (KFLM).

9 P: [...] si esta es mi función [$f(x)=x+1$], yo de ésta puedo sacar la imagen del 1, puedo sacar la imagen del 0, y puedo sacar la imagen del -1. Esto, yo puse el 1, 0 y -1 porque son números que son fáciles de evaluar en cualquier expresión. Podría elegir el 100, -50, el número que se me ocurra, pero dada esta función, ¿cuál es la imagen del 1 cuando pasa por esa función?

Nuevamente, la relación entre preimagen e imagen articula el paso de una representación algebraica (5) a una numérica (6) y luego a la cartesiana (7). En (6) y en el extracto 8, se observa que Arturo vincula estos conceptos con los puntos/pares que darán forma a la representación cartesiana. El cálculo de imágenes, visto como herramienta teórica y activadora de la génesis instrumental, muestra que Arturo conoce el procedimiento para determinar imágenes y lo proyecta en su ETM idóneo como parte de lo que espera realicen sus estudiantes, motivando un trabajo procedimental sobre la representación de la función que apunta hacia lo semiótico. La pregunta del extracto 9 deja ver un tipo de significado atribuido a la función, cercano a la idea de máquina que presentó antes. Cuando el profesor señala “¿cuál es la imagen del 1 cuando pasa por esa función?” se observa el proceso entrada-salida que quiere resaltar y que es útil para el propósito de calcular las imágenes y construir la representación cartesiana. El conocimiento de este significado lo atribuimos a la forma en que Arturo conoce el concepto de función y al trabajo con la función que desea promover en sus estudiantes, es decir, su comprensión del concepto incide en la forma de estructurar el ETM idóneo en torno a los procesos que permite la función.

La representación cartesiana (7) de la función utiliza los valores calculados y las parejas formadas para ubicarlos como puntos en el plano, lo que concreta la estrategia de enseñanza de Arturo respecto de incorporar al plano cartesiano como un elemento estudiado y que es útil para elaborar la representación de la recta propuesta.

10 P: Una línea, me quedó una línea. Me quedó una recta. A las funciones les podemos dar una representación gráfica y ¿cómo se hace esa representación gráfica? Es elegir elementos, números cualquiera. Dadas las funciones que vamos a trabajar, no vamos a tener problema con poder elegir cualquier número, meterlos a la función y obtener su imagen. Si tenemos su imagen, podemos obtener puntos, y esos puntos los meto al plano cartesiano.

11 E: ¿Y esa línea, por qué? ¿Esa es la representación de toda la función?

12 P: Esa es la representación de la función.

13 E: ¿Siempre va a ser una línea?

14 P: Esto de aquí, esto representa $f(x)=x+1$, y, obviamente, como yo puedo seguir evaluando puntos, esto va a seguir creciendo y esto va a seguir creciendo, ¿no? [agrega puntas de flecha a la recta dibujada] entonces por eso es una recta.

En la línea 10, se insiste en la forma que tiene la representación de esta función: "*me quedó una recta*", aludiendo a la visualización que debieran desarrollar sus estudiantes y transitar hacia el representamen durante el trabajo con funciones como las presentadas en (5). De este modo, se observa que el conocimiento que posee Arturo sobre lo que espera de sus estudiantes constituye una entrada al trabajo matemático desde el plano cognitivo hacia el representamen en el plano epistemológico. Al relacionar la función afín con su representación como recta, transita desde la génesis semiótica al referencial de su ETM idóneo, dando bidireccionalidad a este tránsito, a la vez que se observa una conexión entre función y recta como objetos de dos dominios diferentes de la matemática: Análisis y Geometría, respectivamente, lo que se interpreta como el conocimiento de una conexión auxiliar (KSM) entre estos conceptos, donde la representación de la recta sirve de ayuda para determinar la representación gráfica de la función afín.

Por su parte, en el extracto 13, la pregunta del estudiante "¿Siempre va a ser una línea?", podría haber desencadenado una respuesta que ampliase el referencial en el ETM idóneo, ahondando en la relación discreto-continuo, dada por la unión de los puntos al graficar la función, o la existencia de otras funciones cuya representación no es una línea recta. Con ello, se pierde una oportunidad de ampliar el conocimiento de los estudiantes. En este sentido, la generalización que sugiere la pregunta surge del reciente acercamiento de los estudiantes a la gráfica de funciones y al acotado conjunto de tareas de funciones que Arturo muestra en esta primera clase.

Finalmente, el profesor propone una tarea a sus estudiantes en la línea del trabajo recientemente realizado. En el extracto 15 se observa que la función $f(x)=x+1$ es ilustrativa respecto de esta nueva tarea.

15 P: [...] Yo grafiqué $x+1$, grafiquen $x+2$ y con eso me muestran el dibujo y terminamos. Grafiquen la función $x+2$. Represéntela.

16 E: ¿Con qué números?

17 P: Puedes usar los mismos. Los mismos que yo utilicé o puedes usar otros.

El extracto permite confirmar que la estrategia de enseñanza y el trabajo matemático propuesto apunta a la construcción de representaciones cartesianas. Se evidencia una tarea que requiere de los mismos procedimientos realizados previamente por Arturo y la ausencia del trabajo centrado en el estudiante, lo que caracteriza el ETM idóneo actual de Arturo.

En el siguiente extracto 18, se aprecia que Arturo utiliza el gesto como otro recurso de representación, destacando que la representación cartesiana de la función es una forma de acceder al concepto y sus características. De este modo, la comparación entre el reflejo de un estudiante en un espejo y la representación gráfica de la función muestra que, esta última, si bien permite observar algunas características de la función, no deja ver todas las propiedades que la función engloba. Cuando Arturo señala "*tú eres todas tus características, pero tú tienes una imagen*", está haciendo referencia al acceso al concepto a través de una forma de visualizarlo, que deja ver "su forma" mas no todas sus características.

18 P: Esta es la función en esencia... asócialo a esto: tú eres [gesto con la mano de la cabeza para abajo], todas tus características, pero tú tienes una imagen, que es la que tú ves reflejada en el espejo. Con las funciones pasa lo mismo; esta [$f(x)=x+1$] tiene un montón de características que la hacen ser lo que es, pero esto también se mira en el espejo, por lo tanto, también tiene una imagen, y esa es su representación gráfica, lo que tú observas de cómo es la función.

La estrategia de enseñanza de Arturo para presentar las representaciones de la función, articulada mediante la relación entre imagen y preimagen, se entiende como una forma de mostrar diferentes características de las funciones que son posibles de observar en cada una de las representaciones. La tabla 4 muestra las relaciones entre el MTSK y los elementos del ETM que se hallaron durante el análisis.

Tabla 4. Relaciones identificadas entre ETM y MTSK

Descripción según enumeración de Figura 1	**ETM**	**MTSK**
(1)	Referencial (signos)G. Semiótica	KoT Definiciones KoT Representaciones KPM rol de los cuantificadores
(2)	Componente visualización Referencial (imagen y preimagen) G. Semiótica	KoT Representaciones KMT Estrategia de enseñanza
Pasaje (1)-(2)	Visualización Eventual demostración Herramienta semiótica (signo)	KoT KPM
(3)	G. Semiótica	KoT Representaciones
Pasaje (2)-(4)	Herramienta semiótica (diagrama sagital)	
(4)	Referencial (gráfico y representación gráfica) Representamen en la G. Semiótica.	KoT Definiciones y Representaciones KMLS Conocimientos previos KMT Estrategia de enseñanza
(5)	Diseño de ETM idóneo a partir de la selección de tareas	KMT Selección de tareas KoT procedimientos KMLS secuenciación de temas (tipos de funciones)
Pasaje (4)-(6) Pasaje (5)-(6) Pasaje (5)-(6)-(7)	Herramienta semiótica (plano cartesiano) G.S Referencial Herramienta teórica (imagen y preimagen)	KPM
(6)	Génesis Semiótica	KFLM Fortaleza de los estudiantes KoT Representación numérico tabular
(7)	Referencial (relación Preimagen e imagen) G. Semiótica	KoT Representaciones KSM conexión auxiliar

Fuente: Elaboración propia.

La tabla anterior pretende evidenciar cuáles son los elementos del conocimiento especializado y del trabajo matemático de Arturo que se ponen en juego en cada representación y sus articulaciones, lo que permite establecer relaciones entre los modelos. A continuación, se sintetizan los hallazgos por cada representación, del (1) al (7), a modo de ejemplo de lectura de la tabla 4.

1. La definición de función (KoT) se presenta en lenguaje simbólico, poniendo énfasis en el rol de los cuantificadores y en el uso del lenguaje formal (KPM). En el ETM idóneo, se activa el referencial a través de los signos del lenguaje matemático, direccionado hacia la activación de la génesis semiótica. Se considera el signo como una herramienta semiótica por el uso que le da Arturo para realizar la siguiente representación.
2. El diagrama sagital permite identificar conocimientos en el KoT y en el KMT. Asimismo, permite evidenciar desde el representamen elementos del referencial (imagen y preimagen) que inciden en la activación de la génesis semiótica, es decir, en el diseño del ETM idóneo. Además, el diagrama sagital, es considerado como una herramienta semiótica, pues es utilizado para la representación del plano cartesiano, propiciando el tránsito entre (2) y (4).
3. La notación moderna de $f(x)$ usando flechas evidencia el manejo que posee Arturo sobre la noción de función y cómo convierte el diagrama sagital en una expresión algebraica. El trabajo se centra en la génesis semiótica.
4. En el referencial se diferencia el gráfico (conjunto de pares ordenados) y la representación gráfica (conjunto de puntos en el plano) de la función (KoT). El plano y sus puntos son conocimientos previos (KMLS) y se recuerdan para potenciar la estrategia de enseñanza (KMT), dando estructura al ETM idóneo por las decisiones involucradas. Adicionalmente, el plano cartesiano la consideramos como una herramienta semiótica, debido a que su uso permite a Arturo explicar los pares ordenados $(x, f(x))$.
5. Las funciones lineales y afines son los primeros tipos de funciones en el currículo (KMLS) en donde aparece el procedimiento del cálculo de imágenes, mostrando la tarea que privilegia utilizar el profesor.

6. La evaluación que realiza Arturo, al dar valores simples para sus estudiantes (KFLM) y realizar una representación numérico-tabular (KoT), tensiona la génesis semiótica y muestra el trabajo que realiza en el contexto de su ETM idóneo.
7. La línea recta es el resultado de la representación cartesiana de la función afín (KoT), en donde se manifiesta la génesis semiótica, la cual se concreta mediante la relación entre imagen y preimagen, herramienta teórica, que fue transversal e hilo conductor para todas las representaciones. Esta relación se ubica en el referencial del ETM idóneo y motiva el trabajo semiótico sobre las representaciones de la función.

6. Discusión

En la enseñanza de la función se identifican distintos tipos de representaciones intencionado la génesis semiótica durante el trabajo que propone el profesor. Se evidencia su conocimiento y uso de los registros de tipo: sagital (2), algebraica (5), numérica (6) y cartesiana (7). Estas representaciones son secuenciadas y articuladas por medio de la relación imagen-preimagen, lo que da estructura a la estrategia de enseñanza (KMT) de Arturo, a la vez, muestra relaciones entre su conocimiento especializado (del tema, de la enseñanza y del aprendizaje) y el diseño del ETM idóneo, en concordancia con Espinoza-Vásquez *et al*. (2018) respecto de las implicancias del conocimiento especializado sobre dicho diseño. En el caso estudiado, el conocimiento y uso de las representaciones de la función resulta ser un punto de partida para establecer estas relaciones y comprender la práctica del profesor en términos del conocimiento y trabajo matemático que propone el profesor. De acuerdo con Mitchell *et al*. (2014), las representaciones contribuyen a asignar significado a los objetos, resaltan ciertos aspectos del objeto o dejan ocultos otros, pero, en términos de Godino *et al*. (2014), todas ellas son formas de expresar la misma idea de función y cada representación conlleva diferentes procesos que se relacionan entre sí.

De acuerdo con Henríquez-Rivas y Espinoza-Vásquez (2018), el trabajo semiótico es la entrada al trabajo matemático del profesor, y la identificación de los diferentes conocimientos sobre el tema permite pormenorizar el trabajo que fomenta el profesor. En este sentido, se observa la profundidad del conocimiento de Arturo sobre la definición del concepto mediante dos formas de presentar la definición: verbal y en lenguaje simbólico. El uso de este lenguaje permite al profesor comunicar esta idea matemática (en su KPM), dando cuenta de parte de sus propósitos de enseñanza y de lo que espera aprendan sus estudiantes, a la vez que muestra la formalidad del trabajo que propone. La insistencia en esos aspectos formales ha sido señalada como predominante en la enseñanza de los temas de cálculo (Bustos y Ramos, 2022), sin embargo, la sugerencia de los autores está en complementar esto con acercamientos intuitivos a estos conceptos.

La definición de función se presenta en un lenguaje simbólico que, según Sierra *et al*. (1998), no deja ver el significado original de las variables que involucra la función. En una de las intervenciones (extracto 9) del profesor se observa la referencia a la función como un proceso de entrada-salida, lo que contribuye a la comprensión del concepto en sus estudiantes. Como indican Figueiredo *et al.* (2015), la función como proceso es una buena entrada para comprenderla, pero requiere de acercamientos que lo complementen. En nuestro caso, Arturo aborda esta profundización en su ETM idóneo al trabajar diferentes representaciones y mostrarlas de manera integrada (Gómez, 2013), lo que resulta ser una forma eficaz para mejorar la comprensión del objeto.

El trabajo que propone el profesor desde la definición hasta la representación cartesiana incluye dos significados de la función: estructural y procedimental (Sfard, 1991). Lo estructural se presenta en (1) y (2) al ver la función como la tríada Dominio, Recorrido y Regla de asignación, identificando la relación imagen-preimagen. Por su lado, el carácter procedimental se refleja en (5) y (6) al evaluar elementos para obtener sus imágenes. Ambos significados dan pie al desarrollo de diferentes tipos de trabajos, de los cuales Arturo se enfoca en lo procedimental para construir la representación cartesiana (7). En este caso, el conocimiento de la evaluación de la función como herramienta teórica y la conexión entre función afín y recta permiten estructurar el ETM idóneo y establecer los hitos que tendrá la estrategia de enseñanza de las representaciones. En esta construcción (7), el profesor aplica su conocimiento sobre las fortalezas de los estudiantes respecto de la evaluación de ciertos números y sobre lo que se espera que logren sus estudiantes en este nivel (calcular imágenes y representar funciones) para organizar el ETM idóneo. Así, el espacio de trabajo se caracteriza por incluir dicho procedimiento en la activación de la génesis semiótica hacia el referencial, el cual se ve reflejado en distintas partes de su clase.

De acuerdo con Carlson y Oehrtman (2005), el uso de diferentes registros de representación pretende generar una imagen amplia del concepto y apoyar la comprensión de los estudiantes sobre las distintas características de la función que deja ver cada una de esas representaciones. Esto coincide con la estrategia de enseñanza y da un sello distintivo al ETM idóneo respecto de la concatenación de registros, permitiendo al estudiante una mejor comprensión de la noción. Destacamos que, en esta concatenación, las representaciones van tomando el carácter de herramientas conforme son utilizadas en la construcción de las siguientes representaciones, entre ella prevalece la herramienta semiótica del signo dada por los cuantificadores, diagrama sagital y plano cartesiano mediante la relación entre imagen y preimagen, como también se ha evidenciado en Verdugo-Hernández *et al*. (2022).

Por su parte, el currículo escolar chileno propone el estudio del concepto de función, asociando la función lineal a la proporcionalidad y la función afín a cambios aditivos (MINEDUC, 2016). De acuerdo a estas bases curriculares, la comprensión de este objeto se basa en el uso de representaciones como tablas de valores, reglas de asignación, plano cartesiano, diagramas y comparaciones con máquinas. Arturo integra todas ellas en esta clase (y particularmente en este episodio) para presentar el concepto. Aunque el currículo no explicita la relación entre todas estas representaciones, el ETM idóneo de Arturo las vincula y aborda como un todo integrado, en el que cada representación da cuenta de alguna característica de la función.

Esta forma integrada de mostrar las representaciones, características y significados de la función puede interpretarse como la intención del profesor de no generar concepciones erradas en los estudiantes sobre este concepto, tal como lo indican Mitchell *et al*. (2014), lo que también se refleja en las precisiones que realiza sobre la definición de función, la relación entre imagen y preimagen y, especialmente, sobre los conceptos de punto y par ordenado, diferenciándolos en su naturaleza geométrica y de conjuntos, respectivamente. Atribuimos esta precisión a la formación matemática del profesor (magíster en matemáticas) y a su experiencia docente en niveles de educación superior.

Junto a ello se observa también en la metaforización sobre la representación de la función como el reflejo de los estudiantes en un espejo. En Espinoza-Vásquez, Zakaryan y Carrillo (2018) se profundiza en el uso de las comparaciones analógicas para la función y sus implicancias sobre la enseñanza como parte del conocimiento especializado del profesor, destacando que dichas comparaciones requieren de una reflexión profunda sobre la potencialidad de su uso. Arturo usa la metáfora del reflejo de un objeto en el espejo para mostrar que la representación de un objeto solo muestra una parte o algunas características del mismo y no al objeto en su totalidad, de donde emerge la necesidad de manejar varias representaciones para profundizar el concepto. Como señalan Mitchell *et al.* (2014), la conexión entre diferentes representaciones ayudará a los estudiantes a aprender el concepto que se está representando. Así se da cuenta del manejo que posee Arturo para gestionar la enseñanza de distintas representaciones como parte del diseño del ETM idóneo en beneficio de los aprendizajes de los estudiantes.

La enseñanza del concepto de función se vio influenciada por el conocimiento especializado de Arturo, en cuanto al modo en que gestionó la secuencia de representaciones y en cómo estas estaban relacionadas entre sí, ya que vincula una representación con la anterior mediante las relaciones intra conceptuales de la función, establecidas por las herramientas teóricas sobre el cálculo de imágenes.

Al considerar los aspectos de delimitación que generan las conexiones inter conceptuales contempladas en el subdominio KSM (Carrillo *et al*., 2018), observamos que la función lineal-afín y la recta euclidiana se conectan como objetos que pertenecen a dominios distintos de la matemática a través de una representación común (Espinoza, 2020). En este caso, el cambio de dominio que se presenta no implica el uso de una herramienta operacional, sino más bien una herramienta semiótica dada por el plano cartesiano. En Verdugo-Hernández *et al.* (2022) se vincula el cambio de dominio al conocimiento de conexiones auxiliares y al uso de herramientas operacionales, en donde el objeto *sucesión numérica* se conecta, entre otros, con el teorema del binomio y la inducción matemática, estos últimos determinan propiedades y procedimientos útiles en el trabajo con las sucesiones. Sin embargo, en nuestro caso, la recta euclidiana no se muestra como un razonamiento o propiedad geométrica, por lo que no podemos catalogarla como herramienta operacional (según la definición de Verdugo-Hernández, 2018; Verdugo-Hernández *et al.,* 2022), mientras que el plano cartesiano sirve de ayuda en la construcción de la representación de la función afín, expresando una conexión auxiliar (entre función y recta) y ampliando la comprensión del uso de las herramientas del ETM en los cambios de dominio que realiza el profesor.

Por otra parte, destacamos el conocimiento de Arturo sobre distintos tipos de representaciones (1) a (7) en (KoT), incorporando a las mencionadas, otra posible representación mediante el uso de sus manos para destacar una de las propiedades que incluye en la definición de función que conoce (KoT) y que podría proyectarse como una posible fuente de investigación entre los modelos involucrados y el gesto, pudiendo ser ésta una potencial herramienta semiótica, la cual ayudaría a estructurar su estrategia de enseñanza sobre la validación de correspondencias como funcionales (KMT) en relación a su conocimiento sobre las prácticas matemática de validar (KPM). Podemos relacionar este conocimiento con lo señalado por Aparicio y Cantoral (2006) sobre la generación de representaciones gestuales por parte de los estudiantes sobre las funciones lineales, quienes muestran alguna de sus propiedades utilizando sus brazos (la inclinación, por ejemplo). En ese sentido, la representación gestual que Arturo conoce se relaciona con las interacciones de los estudiantes con el contenido, es decir con su KFLM.

7. Conclusiones

Aquí hemos abordado dos aspectos importantes en el estudio de la práctica del profesor: el conocimiento que moviliza y el trabajo que fomenta durante la enseñanza. La observación de estos fenómenos permite definir un foco común en el que los modelos ETM y MTSK pueden aportar con sus elementos para refinar el análisis, reconocer relaciones entre ambos y profundizar en la comprensión de lo que ocurre en el aula a través de esta complementariedad.

Aquello que hemos analizado sobre el trabajo matemático que fomenta el profesor y el conocimiento que moviliza para la enseñanza muestra que, el ETM idóneo de Arturo posee prioritariamente una entrada semiótica a la enseñanza, lo que caracteriza a este ETM, activando también otras componentes como el referencial. Los conocimientos sobre la función, (como definiciones y procedimientos asociados) inciden en cómo se organizan las representaciones para diseñar el ETM idóneo, dando forma a una estrategia de enseñanza que vincula el referencial, la construcción de representaciones y la génesis semiótica. Lo anterior está permeado por aquello que el profesor espera que aprendan sus estudiantes y las fortalezas (y dificultades) que ellos puedan tener en este tema. Así, se observa una estrecha relación entre KoT y PCK y el diseño del ETM idóneo. Agregamos a esto el aporte del ETM al estudio del MTSK respecto de precisar la visualización que el profesor espera lograr del concepto y las características del trabajo matemático que plantea como objetivo de su estrategia de enseñanza.

Reconocemos, pese a que la relación entre ETM idóneo y PCK puede ser esperable por la definición del ETM idóneo, la vinculación más detallada entre los componentes teóricos ayudaría a comprender cómo el profesor usa su conocimiento para diseñar dicho ETM, cómo ese conocimiento condiciona el tipo de trabajo que se propone o cómo un tipo de trabajo requiere de movilizar cierto tipo de conocimiento especializado. Queda pendiente profundizar en estas relaciones ya que los aspectos didácticos son considerados principalmente por el modelo MTSK, por lo que se presume un aporte del MTSK al análisis producido desde el ETM. Además, queda pendiente el rol del gesto, visto desde ambos modelos, puesto que su consideración puede ampliar lo que cada uno de los modelos considera como representación y visualización de los temas matemáticos en juego, con lo que podrían existir análisis más detallados de un objeto de estudio, robusteciendo el marco de la complementariedad ETM-MTSK.

8. Agradecimientos

El trabajo está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Referencias

Akkoç, H. y Tall, D.O. (2003). The Function Concept: Comprehension and Complication. *En Proceedings of the Day Conference of British Society of Research on Learning of Mathematics* (pp.1-6). Sheffield Hallam University. http://www.bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/02/BSRLM-IP-23-1-1.pdf

Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J. y Quesada, S. (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de investigación y divulgación en matemática educativa*, (9), 6-19. http://funes.uniandes.edu.co/14091/1/1._RIDEME_Funci%C3%B3n_Lineal.pdf

Amaya, T.R., Pino-Fan, L. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación matemática*, *28*(3), 111-144. https://doi.org/10.24844/em2803.05

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 7-30. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000100002

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M.A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Universidad de Huelva Publicaciones. https://www.researchgate.net/publication/267392675_Un_marco_teorico_para_el_Conocimiento_especializado_del_Profesor_de_Matematicas

Carrillo J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https//doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carlson, M., y Oehrtman, M. (2005). Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function. https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function_

Castella, C. (2021). Reflexiones sobre la multiplicidad de las teorías en didáctica de las matemáticas. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03199465/document

Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido*. Akal Ediciones.

Bustos, C. y Ramos, E. (2022). Una mirada sobre conceptos del cálculo desde el conocimiento de los temas del profesorado de matemática de secundaria. *Revista Innovaciones Educativas, 24*(36), 84-100. https://doi.org/10.22458/ie.v24i36.3893

Creswell, J.W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. Sage.

Duval, R. 2004. *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, (Vol. 1, pp. 3-26), ERIC/CSMEE.

Dubinsky, E. y Harel (1992). The nature of the process conception of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (85-106). MAA notes, 25.

Espinoza, G. (2020). C*aracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función* (Tesis doctoral) [Conjunto de datos]. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-0000/UCB0313_01.pdf

Espinoza-Vásquez, G., Ribeiro, M. y Zakaryan, D. (2018). Avance en la compresión de las relaciones entre el ETM idóneo y el MTSK del profesor. *Journal of Educational Research MENON*, 4, 146-161. https://www.researchgate.net/publication/329799350_Avance_en_la_comprension_de_las_relaciones_entre_el_ETM_idoneo_y_el_MTSK_del_profesor

Espinoza-Vásquez, G., Verdugo-Hernández, P., Henríquez-Rivas C. y Ponce, R. (2022). Avances en la relación entre MTSK y espacios de trabajo matemático. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. (pp. 265-276). Dykinson.

Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D. y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(3), 301-324. https://doi.org/10.12802/relime.18.2133

Farfán, R. M. y García, M. (2005). El concepto de función: un breve recorrido epistemológico. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (pp. 489-494). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. http://funes.uniandes.edu.co/5974/1/FarfanElconceptoAlme2005.pdf

Figueiredo, C., Contreras, L. y Blanco, L. (2015). Concepto de función: definición, representación y ejemplificación en la enseñanza y aprendizaje. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M.T. González y M. Moreno (Eds.), *Didáctica del análisis matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 67-80). Universidad de La Laguna. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5500496

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L.C., Muñoz-Catalán, M. y Liñán, M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *30*(54), 204–221. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10

Flick, U. (2015). *El diseño de investigación cualitativa*. (Trad. Tomás del Amo y Carmen Blanco). Ediciones Morata S.A.

Glaser, B.G. y Strauss, A.L. (1967). The discovery of Grounded Theory. *Strategies for qualitative research*. Aldine.

Godino, J.D., Aké, L., Gonzato., M. y Whilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Goldin, G. y Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. P, Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin, y B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Erlbaum. https://www.researchgate.net/publication/269407907_A_joint_perspective_on_the_idea_of_representation_in_learning_and_doing_mathematics

Gómez, O. (2013). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. *Revista científica, 2*, 115-120. https://doi.org/10.14483/23448350.5966

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *30*(54), 1-22. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Henríquez-Rivas, C. y Espinoza-Vásquez, G. (2018). Relación ETM-MTSK: conexiones entre la génesis semiótica y el conocimiento de los temas. En E. Montoya, P. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Machietto y D. Tanguay (Eds.), *Actas Sixième Symposium sur le Travail Mathématique* (pp. 507-512). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. https://bit.ly/3oosGVa

Jones, M. (2006). Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. *Undergraduate Math Journal*, *7*(2), 1-20. https://bit.ly/3aVF7EC

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9–24. https://www.researchgate.net/publication/278622106_L'espace_de_Travail_Mathematique_et_ses_geneses

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *17*(4-I), 5-15. https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *The International Journal on Mathematics Education*, *48*(6), 861–874. http://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Kuzniak, A. y Nechache, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines: existence et usages. *Cinquième symposium des Espaces de Travail Mathématiques*, Florina, Grèce, juillet 2016. https://etm7.sciencesconf.org/data/Actes_ETM6.pdf

Lougrhan, J., Mulhall, P. y Berry, A. (2008). Exploring pedagogical content knowledge in science teacher education. *International Journal of Science Education, 30*(10), 1301-1320. https://doi.org/10.1080/09500690802187009

Ministerio de Educación de Chile. (2016). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación. https://media.mineduc.cl/

Mitchell, R., Charalambous, C. y Hill, H. (2014). Examining the task and knowledge demands needed to teach with representations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*, 37-60. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9253-4

Prediger, S., Arzarello, F., Bosch, M. y Lenfant, A. (2008). Comparing, Combining, coordinating-Networking strategies for connecting theoretical approaches. *Thematic Issue of ZDM-The Intenational Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 163-327. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0093-0

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, *3*(2), 3-8. https://core.ac.uk/download/pdf/12423242.pdf

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 317–327. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3

Ribeiro, A. y Cury, H. (2018). Álgebra para a *formaçao do profesor: Explorando os conceitos de equaçao e de funçao*. Autêntica.

Rico, L. (1997). *Apuntes sobre fenomenología*. Documento no publicado (Informe). Universidad de Granada. http://funes.uniandes.edu.co/485/

Rodríguez-Flores, A., Picado-Alfaro, M., Espinoza-González, J. y Rojas-González, N. (2018). El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. *UNICIENCIA*, *32*(1), 89-107. https://doi.org/doi:10.15359/ru.32-1.6

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Ediciones Aljibe.

Rojas, N., Carrillo, J. y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479 - 485). SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/2072/

Roque, T. (2012). *História da matemática – Uma visao crítica, desfazendo mitos e lendas*. ZAHAR.

Ruiz-Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_LRuiz-Higueras.pdf

Sastre, P., Rey, G. y Boubée, C. (2008) El concepto de función a través de la historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *16*, 141-155. http://funes.uniandes.edu.co/14888/1/Sastre2008El.pdf

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36. https://link.springer.com/article/10.1007/BF00302715

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. https://www.wcu.edu/webfiles/pdfs/shulman.pdf

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula*, *10*, 89-104. https://gredos.usal.es/handle/10366/69318

Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal*. Editorial Reverté S.A.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Vasco-Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y Espacios de Trabajo Matemático. *Boletín de Educación Matemática, 30*(54), 222–239. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a11

Verdugo-Hernández, P. (2018). *Espacio de Trabajo Matemático del análisis: enseñanza de las sucesiones en los primeros años de universidad* (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso. http://repositorio.conicyt.cl/handle/10533/208871

Verdugo-Hernández, P., Espinoza-Vásquez, G. y Carrillo Yáñez, J. (2022). Análisis de una tarea sobre sucesiones desde el uso de las herramientas y el conocimiento matemático del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(2), 1-21. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3457

Verdugo-Hernández, P. y Espinoza-Vásquez, G. (2018a). Utilización de las herramientas en el Espacio de Trabajo Matemático y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *11*(1), 91-95. https://www.sochiem.cl/documentos-rechiem/revista-rechiem-11-N1-2018.pdf

Verdugo-Hernández, P. y Espinoza-Vásquez, G. (2018b). Comprensión del uso de las herramientas teóricas y operatorias en el Espacio de Trabajo Matemático y el conocimiento matemático del profesor. En E. Montoya, P. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Machietto y D. Tanguay (Eds.), *Actas Sixième Symposium sur le Travail Mathématique* (pp. 455-466). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. https://bit.ly/3zk1xYD

Youschkevitech, A.P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th Century (Rosa María Farfán, Trad.). *Arch. Hist. Exact. Sci.* (16), 37-85. https://www.jstor.org/stable/41133460

Zuffi, E. M. y Pacca, J. L.A. (2002). O conceito de função e sua linguagem para os professores de matemática e de ciências. *Ciência y Educação*, *8*(1), 1-12. https://doi.org/10.1590/s1516-73132002000100001